

Title	非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数とそれに付随する交代的多重ゼータ値について (多重ゼータ値の諸相)
Author(s)	山崎, 義徳
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1813: 6-15
Issue Date	2012-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/194537">http://hdl.handle.net/2433/194537</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数と それに付随する交代的多重ゼータ値について\*

愛媛大学大学院理工学研究科 山崎 義徳 (Yoshinori YAMASAKI)

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

yamasaki@math.sci.ehime-u.ac.jp

## 1 導入

この論述では, 以下で定義される多重級数について解説する (詳しくは論文 [KiY] をご覧頂きたい).

$$S_k^{(N,M)}(n_1, \dots, n_k) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k}^{(N)} \frac{\omega_M^{i_1 + \dots + i_k}}{i_1^{n_1} \dots i_k^{n_k}}.$$

ここで,  $k, N, M$  は自然数,  $\omega_M := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{M})$ ,  $\varepsilon_{i_1 \dots i_k}^{(N)} \in \{0, 1\}$  は

$$\varepsilon_i^{(N)} := 1, \quad \varepsilon_{ij}^{(N)} := \begin{cases} 0 & i = j \not\equiv 0 \pmod{N}, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_k}^{(N)} := \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{i_j i_{j+1}} \quad (k \geq 3)$$

で定義する. 簡単にわかるように,  $k = 1$  のとき, これは多重対数関数  $Li_n(z) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^n}$  の  $z = \omega_M$  での特殊値を与える. また, この級数は, 等号無しの多重級数と等号付きの多重級数を補間する級数と見ることできる. 実際, 等号無し多重ゼータ値  $\zeta_k^\bullet$ , 等号付き多重ゼータ値  $\zeta_k^*$  を

$$\zeta_k^\bullet(n_1, \dots, n_k) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}}, \quad \zeta_k^*(n_1, \dots, n_k) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{1}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}},$$

また, 等号無し交代多重ゼータ値  $\zeta_k^{\bullet, \text{alt}}$ , 等号付き交代多重ゼータ値  $\zeta_k^{*, \text{alt}}$  を

$$\zeta_k^{\bullet, \text{alt}}(n_1, \dots, n_k) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_k}}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}}, \quad \zeta_k^{*, \text{alt}}(n_1, \dots, n_k) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_k}}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}}$$

で定義すれば,  $M = 1$  のとき,  $S_k^{(1,1)} = \zeta_k^*$ ,  $S_k^{(\infty,1)} = \zeta_k^\bullet$ ,  $M = 2$  のとき,  $S_k^{(1,2)} = \zeta_k^{*, \text{alt}}$ ,  $S_k^{(\infty,2)} = \zeta_k^{\bullet, \text{alt}}$  となっている<sup>1</sup>.  $M = 2$  のとき, 特に  $S_k^{(N,2)}$  は  $\zeta_k^{*, \text{alt}}$  の部分和になっているので, これを部分交代多重ゼータ値と呼ぶことにする. 後で見るように  $N = 2$  の場合が本研究の出発点であり, これを単に  $S_k^{(2,2)} = S_k$  と書くことにする.

このように, 新しい多重ゼータを定義したのだが, これは本質的に新しい関数ではない. つまり, 簡単な考察により,  $S_k^{(N,M)}$  は Arakawa-Kaneko ([AK1]) によって研究された多重  $L$ -値

$$L_{\square}^\bullet(n_1, \dots, n_k; f_1, \dots, f_k) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{f_k(i_k - i_{k-1}) \dots f_2(i_2 - i_1) f_1(i_1)}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}},$$

$$L_*^\bullet(n_1, \dots, n_k; f_1, \dots, f_k) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{f_1(i_1) f_2(i_2) \dots f_k(i_k)}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \dots i_k^{n_k}},$$

\*木本一史氏 (琉球大学) との共同研究.

<sup>1</sup>  $N = \infty$  のとき, 若干厳密ではない

または、それらの等号付き版

$$L_{\text{III}}^*(n_1, \dots, n_k; f_1, \dots, f_k) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{f_k(i_k - i_{k-1}) \cdots f_2(i_2 - i_1) f_1(i_1)}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \cdots i_k^{n_k}},$$

$$L_{\text{IV}}^*(n_1, \dots, n_k; f_1, \dots, f_k) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{f_1(i_1) f_2(i_2) \cdots f_k(i_k)}{i_1^{n_1} i_2^{n_2} \cdots i_k^{n_k}}$$

のしかるべき線形和で書けることが示される。例えば、

$$(1.1) \quad S_k(a, b) = \frac{1}{2^{a+b}} \zeta(a+b) + L_{\text{IV}}^*(a, b; \chi, \chi),$$

といった具合である。ここで  $\chi(n) := (-1)^n$  とする。

多重ゼータ値の研究において、まずは  $n_1 = n_2 = \dots = n_k$  という特別な場合が考えられる。 $\{n\}^k := \underbrace{\{n, \dots, n\}}_k$  と書く。以下はよく知られた事実である ([AK2, M, BBB, Y] などを参照)。

$$\zeta_k^*(\{2\}^k) = \frac{1}{(2k+1)!} \pi^{2k}, \quad \zeta_k^*(\{2\}^k) = \frac{(-1)^{k-1} (2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k},$$

$$\zeta_k^{\text{alt}}(\{2\}^k) = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{2^k (2k+1)!} \pi^{2k}, \quad \zeta_k^{*,\text{alt}}(\{2\}^k) = \left\{ \sum_{m=0}^k \binom{2k}{2m} \frac{(-1)^{m-1} (2^{2m} - 2) B_{2m} E_{2k-2m}}{2^{2k} (2k)!} \right\} \pi^{2k}.$$

ここで  $B_k$  はベルヌーイ数、 $E_k$  はオイラー数である。もちろんこれらは  $n = 2m$  の場合の公式として確立されており、実際  $\zeta_k^*(\{2m\}^k), \zeta_k^*(\{2m\}^k), \zeta_k^{\text{alt}}(\{2m\}^k), \zeta_k^{*,\text{alt}}(\{2m\}^k) \in \mathbb{Q} \pi^{2km}$  が示される。上記の類似として  $S_k(\{2\}^k)$  を計算してみると、意外にも大変簡明な結果が得られる。

**定理 1.1.**

$$(1.2) \quad S_k(\{2\}^k) = \frac{(-1)^k B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} = -\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}} \in \mathbb{Q} \pi^{2k}.$$

ここで  $\zeta(s)$  はリーマンゼータ関数である。□

なぜこのように複雑な形をした多重級数 (の特別な場合) がこれほど簡単になるのか、これが本研究の動機であった。その答えの一つは  $S_k$  の由来にあると考えているのだが、根拠となるものはまだ得られていない。なお、(1.2) は、主結果の系 (系 3.5) としてただちに得られるものである。

第2章では  $S_k$  の由来となる非可換調和振動子、および、そのスペクトルゼータ関数について概説する<sup>2</sup>。第3章では主結果 ( $S_k^{(N,M)}(\{n\}^k)$  の母関数表示) を、最終章では主結果の証明のスケッチを述べる。

## 2 由来：非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数

非可換調和振動子を説明する前に、まずは通常の調和振動子について述べる。

次の2階の微分作用素  $H$  を調和振動子<sup>3</sup>と呼ぶ。

$$H := -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2.$$

$H$  は  $L^2(\mathbb{R})$  上の非有界な正值自己共役作用素を定める。 $\text{Spec}(H)$  で  $H$  の (重複度込みの) 固有値全体のなす集合を表すことにする。 $\text{Spec}(H) = \{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  であり、各固有値の重複度はすべて1であることが知られている。実際、 $v_n(x) := H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$  ( $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  は  $n$  次のエルミート多項式) が  $H$  の固有値  $n + \frac{1}{2}$  に対する固有関数であり、 $\{v_n(x)\}_{n \geq 0}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の直交基底になっている。

<sup>2</sup>筆者自身の結果はありません。

<sup>3</sup>より正確には、量子化された1次元調和振動子のハミルトニアン演算子。

一般に, 作用素  $T$  に対して,  $\zeta_T(s) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}(T)} \lambda^{-s}$  で定義される級数を  $T$  のスペクトルゼータ関数と呼ぶ. 上の事実から, 調和振動子  $H$  のスペクトルゼータ関数は次のように書ける.

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^s} = \zeta(s, \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

ここで  $\zeta(s, z)$  はフルビッツゼータ関数である. つまり,  $\zeta_H(s)$  は本質的にリーマンゼータ関数と一致する. よって, 作用素  $H$  の一般化が得られれば, そのスペクトルゼータ関数を考えることでリーマンゼータ関数の一般化を得ることができる. そこで今回  $H$  の一般化として考えるのが, タイトルにもある非可換調和振動子と呼ばれる微分作用素である.

$\alpha, \beta > 0, \alpha\beta > 1$  という条件を満たす実数  $\alpha, \beta$  に対して, 次で定義される 2 階の微分作用素  $Q_{\alpha, \beta}$  を非可換調和振動子という.

$$Q_{\alpha, \beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left( x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right).$$

$Q_{\alpha, \beta}$  は, Parmeggiani-Wakayama ([PW1, PW2]) によって導入された ([P] も参照のこと). 調和振動子の場合と同様に,  $Q_{\alpha, \beta}$  は  $\mathbb{R}$  上の  $\mathbb{C}^2$  値二乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$  上の非有界な正値自己共役作用素を定める. さらに,  $Q_{\alpha, \beta}$  は離散固有値のみを持つことが示される. そこで,  $Q_{\alpha, \beta}$  の固有値を小さい順に並べて  $(0 <) \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots (\nearrow +\infty)$  と書くことにする. 各固有値  $\lambda_n$  を具体的に記述することは非常に難しい. だが,  $\lambda_n$  の重複度が高々 3 であることは分かっている. このように, 数学的に非常に良い性質を持つ  $Q_{\alpha, \beta}$  だが, これは何らかの物理モデルに由来しているわけではなく, 現在のところ,  $Q_{\alpha, \beta}$  が記述するような具体的な物理モデルがあるかどうか不明である.

$Q_{\alpha, \beta}$  が “非可換” 調和振動子と呼ばれる一つの理由は, 定義に出てくる 2 つの行列が一般には可換ではないためである. では “可換” な場合はどうなっているのだろうか. 簡単な考察で, 上記の 2 つの行列が可換になるための必要十分条件が  $\alpha = \beta$  であることが分かる. このとき, 実は

$$Q_{\alpha, \alpha} \simeq \sqrt{\alpha^2 - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) = \sqrt{\alpha^2 - 1} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

となる. つまり, “可換” 調和振動子  $Q_{\alpha, \alpha}$  は, 本質的に調和振動子  $H$  の 2 つの組とユニタリ同値になる. このことから,  $\text{Spec}(Q_{\alpha, \alpha}) = \{\sqrt{\alpha^2 - 1}(n + \frac{1}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  および, 各固有値の重複度が丁度 2 になることが示され, 最終的に次を得る.

$$\zeta_{Q_{\alpha, \alpha}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{\alpha^2 - 1}(n + \frac{1}{2}))^s} = 2(\alpha^2 - 1)^{-\frac{s}{2}} \zeta(s, \frac{1}{2}).$$

上記を踏まえると, リーマンゼータ関数の一般化として本質的なのは  $\alpha \neq \beta$  の場合である ( $\alpha$  と  $\beta$  の比  $\frac{\alpha}{\beta}$  がさらに本質的). また, このとき  $\lambda_n$  の形が具体的にわかっていないので, 固有値の全体的な挙動を調べるという意味でもスペクトルゼータ関数  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  の研究が重要になる.  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  の本格的な研究は Ichinose-Wakayama ([IW1]) によって始まった. そこでは以下の基本的な性質が明らかとなった.

**定理 2.1** ([IW1]). (i)  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  は  $\text{Re}(s) > 1$  で絶対収束し, そこで正則関数を定める.

(ii)  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  は全平面へ有理型接続可能である. また,  $s = 1$  にのみ 1 位の極を持ち,

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}}.$$

(iii)  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  は  $s = 0, -2, -4, -6, \dots$  に 1 位の零点を持つ. □

ここで非正の偶数点が零点である理由は,  $\zeta_{Q_{\alpha, \beta}}(s)$  を解析接続する際, リーマンゼータ関数のときと同様にガンマ関数が見れるからである. この意味で, これらの零点は “自明な零点” と呼ばれている. なお,

関数等式の存在や“非自明零点”, また, リーマン予想の類似性などについてもまだ分かっていない (スペクトルゼータ関数  $\zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(s)$  全般については, [W] を参照にされたい).

次に,  $\zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(s)$  の正の整数点での特殊値について説明する.  $m \geq 2$  に対して, 天下りのだが数列  $\{J_m(n)\}_{n \geq 0}$  を以下の多重積分で定義する.

$$J_m(n) = 2^m \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left( \frac{(1-x_1^4)(1-x_2^4 \cdots x_m^4)}{(1-x_1^2 \cdots x_m^2)^2} \right)^n \frac{dx_1 \cdots dx_m}{1-x_1^2 \cdots x_m^2}.$$

例えば,

$$J_m(0) = \zeta(m, \frac{1}{2}), \quad J_m(1) = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{4^k} \zeta(m-2k, \frac{1}{2}) + \frac{1-(-1)^m}{2}$$

などが示される.  $J_m(n)$  は,  $m = 2, 3$  のとき Apéry-like number,  $m$  が一般のとき higher Apéry-like number と呼ばれている ([KiW1, Ki1]). 実際, 数列  $J_m(n)$  が満たす漸化式は, Apéry が  $\zeta(m)$  ( $m = 2, 3$ ) の無理数性を示したときに用いた数列  $u_m(n)$  が満たす漸化式と酷似している. 例えば,  $m = 2$  のときは以下の通りである.

$$\begin{aligned} 4n^2 J_2(n) - (8n^2 - 8n + 3)J_2(n-1) + 4(n-1)^2 J_2(n-2) &= 0, \\ n^2 u_2(n) - (11n^2 - 11n + 3)u_2(n-1) - (n-1)^2 u_2(n-2) &= 0. \end{aligned}$$

ただし,  $m \geq 3$  の場合, 一般に  $J_m(n)$  が満たす漸化式は非斉次である. また,  $J_2(n)/J_2(0)$  や  $u_2(n)$  が満たす (一般に素数のべきを法とする) 合同関係式にも, いくつかの点で類似性が見られる.

$J_m(n)$  の母関数  $g_m(x)$  を,  $g_m(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n J_m(n) x^n$  で定義する<sup>4</sup>.  $\zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(s)$  の正の整数点での特殊値に関する最初の結果は, Ichinose-Wakayama ([IW2]) において得られた次の公式である.

**定理 2.2** ([IW2]).

$$\begin{aligned} \zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(2) &= 2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \right)^2 \left( (2^2 - 1)\zeta(2) + \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 g_2 \left( \frac{1}{\alpha\beta - 1} \right) \right), \\ \zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(3) &= 2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2\sqrt{\alpha\beta(\alpha\beta - 1)}} \right)^3 \left( (2^3 - 1)\zeta(3) + 3 \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 g_3 \left( \frac{1}{\alpha\beta - 1} \right) \right). \end{aligned}$$

□

$m$  が一般の場合は,  $\zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(m)$  の定理 2.2 に対応する公式が Kimoto ([Ki2] ([Ki3] も参照)) によって得られている. それらを記述するためには,  $J_m(n)$  だけではなく,  $J_m(n)$  をさらに一般化した (やはりある種の多重積分で定義された) 数列が必要になる.

これらの事実からわかるように, スペクトルゼータ関数  $\zeta_{Q_{\alpha,\beta}}(s)$  の正の整数点での特殊値の研究においては, 数列  $J_m(n)$  (およびその一般化たち) のより詳しい情報が必要となる. ここで  $m = 2r$  とすると,  $J_{2r}(n)$  は次のように書けることが示される ([Ki1]).

$$J_{2r}(n) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{-\frac{1}{2}}{p}^2 \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta(2r-2k, \frac{1}{2}) S_{k,p}.$$

ここで  $S_{k,p}$  は次で定義される有限和である.

$$S_{k,p} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq 2p} \varepsilon_{i_1 \cdots i_k}^{(2)} \frac{(-1)^{i_1 + \cdots + i_k}}{i_1^2 \cdots i_k^2}.$$

この  $S_{k,p}$  の極限  $p \rightarrow \infty$  を取ったものが, 今回の研究の主対象である  $S_k(\{2\}^k)$  である.

$$S_k(\{2\}^k) = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{k,p} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k} \varepsilon_{i_1 \cdots i_k}^{(2)} \frac{(-1)^{i_1 + \cdots + i_k}}{i_1^2 \cdots i_k^2}.$$

<sup>4</sup>  $g_m(x)$  の代わりに母関数  $w_m(t) := \sum_{n=0}^{\infty} J_m(n) t^n$  を考えると, これは微分方程式の観点から興味深い対象になっている ( $m = 2$  の場合, 楕円曲線や保型形式と関連あり ([KiW2])).

### 3 主結果

$S_k^{(N,M)}(\{n\}^k)$  の母関数は、ガンマ関数の積商で具体的に書ける。これが今回の主結果である。

**定理 3.1.**  $n \geq 1$  に対して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(N,M)}(\{n\}^k) x^{nk} = \frac{\prod_{k=1}^M \prod_{j=0}^{2n-1} \Gamma(\frac{1}{M}(k - \frac{x}{N} \omega_{2n}^j \omega_{Mn}^{kN}))}{\prod_{k=1}^M \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\frac{k}{M}) \Gamma(\frac{1}{M}(k - x \omega_{2n}^{2j-1} \omega_{Mn}^k))}.$$

ここで  $S_0 := 1$  とする。特に、 $N = M = 2$  のとき、

$$(3.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\{n\}^k) x^{nk} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(1 - \frac{x}{2} \omega_n^j)}{\prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \omega_n^j)}.$$

□

母関数 (3.1) から、以下のように  $S_k(\{n\}^k)$  の情報を取り出すことが出来る。

まず、ガンマ関数の二倍角の公式を使うと、(3.1) は次のように書き換えられる。

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(\{n\}^k) x^{nk} = 2^{-x\delta_{n,1}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{x}{2} \omega_n^j)^2}{\Gamma(1 - x \omega_n^j)}.$$

ここで  $\delta_{n,1}$  はクロネッカーのデルタである。すると、右辺のガンマ関数の積商の部分は、丁度 Aomoto ([Ao]), Drinfel'd ([D]), Zagier の公式

$$\frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)} = \exp\left(\sum_{m=2}^{\infty} \zeta(m) \frac{X^m + Y^m - (X+Y)^m}{m}\right)$$

が ( $X = Y = \frac{x}{2} \omega_n^j$  として) 適用可能な形になっている。実際に公式を使うことで次を得る。

**系 3.2.** (i)  $n = 1$  のとき、 $S_k(\{1\}^k) \in \mathbb{Q}[\log 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(k)]$ .

(ii)  $n \geq 2$  のとき、 $S_k(\{n\}^k) \in \mathbb{Q}[\zeta(n), \zeta(2n), \zeta(3n), \dots, \zeta(kn)]$ . 特に、 $S_k(\{2m\}^k) \in \mathbb{Q}\pi^{2mk}$ . □

**例 3.3.**  $n = 1$  のとき、

$$\begin{aligned} S_1(\{1\}^1) &= -\log 2, \\ S_2(\{1\}^2) &= \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \frac{1}{4}\zeta(2), \\ S_3(\{1\}^3) &= -\frac{1}{6}(\log 2)^3 + \frac{\log 2}{4}\zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(3). \end{aligned}$$

**例 3.4.**  $n = 3$  のとき、

$$\begin{aligned} S_1(\{3\}^1) &= -\frac{3}{4}\zeta(3), \\ S_2(\{3\}^2) &= -\frac{31}{64}\zeta(6) + \frac{9}{32}\zeta(3)^2, \\ S_3(\{3\}^3) &= -\frac{255}{768}\zeta(9) + \frac{93}{128}\zeta(6)\zeta(3) - \frac{27}{384}\zeta(3)^3. \end{aligned}$$

一方で  $n$  が偶数のとき、 $n = 2m$  と書けば、今度はガンマ関数の相補公式から (3.1) は

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(\{2m\}^k) x^{2nk} = \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(1 - \frac{x}{2} \omega_{2m}^j) \Gamma(1 + \frac{x}{2} \omega_{2m}^j)}{\Gamma(1 - x \omega_{2m}^j) \Gamma(1 + x \omega_{2m}^j)} = \prod_{j=1}^m \frac{\pi x \omega_{2m}^j}{2} \cot \frac{\pi x \omega_{2m}^j}{2}$$

と書くことができる。右辺に  $\cot(x)$  の  $x = 0$  でのローラン展開の式  $\cot(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l}(-1)^l B_{2l}}{(2l)!} x^{2l-1}$  を代入して係数比較を行うことで、 $S_k(\{2m\}^k)$  の次のような表示を得ることもできる。

系 3.5.

$$(3.2) \quad S_k(\{2m\}^k) = (-1)^{mk} \left( \sum_{\substack{l_1, \dots, l_m \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_m = mk}} \omega_m^{l_1 + 2l_2 + \dots + ml_m} \frac{B_{2l_1}}{(2l_1)!} \dots \frac{B_{2l_m}}{(2l_m)!} \right) \pi^{2mk}.$$

□

なお, (3.2) は  $mk$  (もしくは  $k$ ) の分割にわたる和として書きなおすことも可能であり<sup>5</sup>, その表示を用いれば, 系 3.2 同様  $S_k(\{2m\}^k) \in \mathbb{Q}\pi^{2mk}$  を示すことが出来る.

例 3.6.  $n = 2$  ( $m = 1$ ) とすれば, (1.2) を得る.

例 3.7.  $n = 4$  ( $m = 2$ ) のとき,

$$S_k(\{4\}^k) = \left( \sum_{l=0}^{2k} (-1)^l \frac{B_{2l} B_{4k-2l}}{(2l)!(4k-2l)!} \right) \pi^{4k}.$$

なお, 今回はインデックスがすべて等しい場合しか取り扱わなかったが, 従来の多重ゼータ値同様, 今後は  $S_k$  (もっと一般に  $S_k^{(N, M)}$ ) の間の (線形) 関係式を調べるのが課題となってくる. 例えば,  $k = 2$  のとき, 多重ゼータ値  $\zeta_k^*$ ,  $\zeta_k^*$  はオイラーの公式 (和公式の特別な場合) と呼ばれる以下の関係式を満たす.

$$\zeta_2^*(1, k) = \frac{k+2}{2} \zeta(k+1) - \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{k-1} \zeta(p) \zeta(k+1-p),$$

$$\zeta_2^*(1, k) = \frac{k}{2} \zeta(k+1) - \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{k-1} \zeta(p) \zeta(k+1-p).$$

この類似として,  $S_k$  に対するオイラーの公式が次のように導かれる.

命題 3.8.

$$\begin{aligned} S_2(1, 2k) &= (k+1)(2^{-2k} - 1) \zeta(2k+1) + (2 - 2^{1-2k}) \zeta(2k) \log 2 \\ &\quad - \sum_{p=1}^{k-1} (2^{-2p} - 1) \zeta(2p+1) \zeta(2k-2p), \\ S_2(2k, 1) &= -k(2^{-2k} - 1) \zeta(2k+1) - \zeta(2k) \log 2 \\ &\quad + \sum_{p=1}^{k-1} (2^{-2p} - 1) \zeta(2p+1) \zeta(2k-2p). \end{aligned}$$

□

これは, (1.1) と二重  $L$ -値  $L_\bullet^*(a, b; \chi, \chi)$  に対するオイラーの公式 ([BZB]) から従う. なお奇数の場合, すなわち,  $S_2(1, 2k+1)$ ,  $S_2(2k+1, 1)$  がリーマンゼータ値および  $\log 2$  の多項式で書けるかどうかは, 上記の二重  $L$ -値同様定かではない<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>このとき, (3.2) における  $\omega_m^{l_1 + 2l_2 + \dots + ml_m}$  に対応する部分は, 対称関数の重合 (plethysm) で書ける.

<sup>6</sup>もう少し補足すると, これらの公式は  $L_\bullet^*(k, 1; \chi, \chi) - L_\bullet^*(1, k; \chi, 1) \in \mathbb{Q}[\log 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(k+1)]$ ,  $L_\bullet^*(k, 1; \chi, \chi) + (-1)^k L_\bullet^*(1, k; \chi, 1) \in \mathbb{Q}[\log 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(k+1)]$  という事実から従う.

#### 4 証明のスケッチ

主結果は、“対称関数の特殊化”を用いて示される。そのために、まずは分割や対称関数の標準的な言葉を用意しておく(詳しくは [M] を参照のこと)。

自然数の単調非増加な列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  を分割という。分割  $\lambda$  に対して、 $|\lambda| := \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j$  を  $\lambda$  の重さ、 $\ell = \ell(\lambda)$  を  $\lambda$  の長さという。 $\lambda$  が重さ  $k$  の分割のとき、 $\lambda \vdash k$  と書く。 $m_i(\lambda) := \#\{j \mid m_j = i\}$  を  $\lambda$  における  $i$  の重複度と呼ぶ。分割は、しばしば重複度を用いて  $\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \dots)$  と書かれることもある。分割  $\lambda$  から 1 を取り除いた分割を  $\lambda_{>1}$  と書く。つまり、 $\lambda_{>1} = (2^{m_2(\lambda)}, 3^{m_3(\lambda)}, \dots)$  である。 $\lambda$  の成分がすべて偶数であるとき、 $\lambda$  は even であるという。また、分割  $\lambda, \mu$  に対して、 $\lambda_i - \mu_i = 0$  または 1 のとき、 $\lambda/\mu$  は vertical strip であるという。例えば  $(4, 2, 2, 1, 1, 1)/(3, 2, 1, 1)$  は vertical strip である。 $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  を変数とする。ここで用いる対称関数は、次の二つである。

$$e_k = e_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad h_k = h_k(x) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

$e_k$  を基本対称関数、 $h_k$  を完全対称関数と呼ぶ。定義から、多重ゼータ値とこれらの対称関数の間には関係がありそうなのがすぐにわかる。実際、変数の特殊化  $(x_1, x_2, \dots) = (\frac{1}{1^n}, \frac{1}{2^n}, \dots)$  を行うことで、

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{1}{i_1^n \cdots i_k^n} = \zeta_k^*(\{n\}^k), \quad h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{1}{i_1^n \cdots i_k^n} = \zeta_k^*(\{n\}^k)$$

が得られる。つまり、インデックスがすべて等しいときの多重ゼータ値は、対称関数の特殊化としてとらえることができる。この観点に立つと、 $\zeta_k^*(\{n\}^k)$  および  $\zeta_k^*(\{n\}^k)$  の母関数が、対称関数の理論からすぐに計算できる。実際、 $e_k, h_k$  の母関数が無限積

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k = \prod_{l=1}^{\infty} (1 + x_l t), \quad H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - x_l t)^{-1}$$

で与えられるので、これらの式に先ほどの変数の特殊化を施してやれば、

$$(4.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta_k^*(\{2m\}^k) t^{2mk} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{2m}}{n^{2m}}\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^*(\{2m\}^k) t^{2mk} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^{2m}}{n^{2m}}\right)^{-1}$$

となる。ここで  $\zeta_0^* = \zeta_0^* := 1$  とおいた。あとは右辺に  $\sin(x)$  の無限積表示を使い、さらに  $\sin(x)$  (もしくは  $\csc(x)$ ) の  $x = 0$  におけるテイラー展開 (もしくはローラン展開) の式を代入して係数比較を行えば、(3.2) と同様に  $\zeta_k^*(\{2m\}^k)$ ,  $\zeta_k^*(\{2m\}^k)$  の具体的な値が計算できる。特に、 $\zeta_k^*(\{2m\}^k)$ ,  $\zeta_k^*(\{2m\}^k) \in \mathbb{Q}\pi^{2mk}$  が示される。もっと一般に、 $\psi$  をディリクレ指標とすると、同様の考え方で  $L_{\psi}^*(\{n\}^k; \{\psi\}^k)$ ,  $L_{\psi}^*(\{n\}^k; \{\psi\}^k) \in \mathbb{Q}(\psi)\pi^{nk}$  (ただし  $n$  と  $\psi$  の偶奇は等しいとする) が示される ([Y])。

以下、主定理の証明のスケッチを述べる。煩雑さを避けるため  $N = M = 2$  の場合で説明する (一般の場合も同様である)。 $S_k(\{n\}^k)$  自身は、上記のように対称関数の特殊化としてとらえることはできない。そこで、まずは  $S_k(\{n\}^k)$  を細分化することを考える。 $k$  個の自然数  $i_1, \dots, i_k$  が  $i_1 \leq \dots \leq i_k$  を満たすと仮定する。このとき、

$$\underbrace{i_1 = \dots = i_{r_1}}_{r_1} < \underbrace{i_{r_1+1} = \dots = i_{r_1+r_2}}_{r_2} < \dots < \underbrace{i_{r_1+\dots+r_{\ell-1}+1} = \dots = i_{r_1+\dots+r_{\ell}}}_{r_{\ell}}.$$

によって  $k$  の分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell})$  と  $\lambda$  の置換  $(r_1, \dots, r_{\ell})$  が一意的に定まる。これを踏まえると、

$$\begin{aligned} S_k(\{n\}^k) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_k}}{i_1^n \cdots i_k^n} \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} \sum_{(r_1, \dots, r_{\ell}) \in \mathcal{P}(\lambda)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{\ell}} \varepsilon_{j_1 \dots j_{r_1} \dots j_{r_{\ell}} \dots j_{r_{\ell}}} \frac{(-1)^{r_1 j_1 + \dots + r_{\ell} j_{\ell}}}{j_1^{r_1 n} \cdots j_{\ell}^{r_{\ell} n}} \\ &= \sum_{\lambda \vdash k} S(n; \lambda) \end{aligned}$$



と書くことができる. ここで,  $\varepsilon_{i_1 \dots i_k} := \varepsilon_{i_1 \dots i_k}^{(2)}$ ,  $\mathcal{P}(\lambda)$  は  $\lambda$  の置換全体のなす集合,  $S(n; \lambda)$  は

$$S(n; \lambda) = \sum_{(r_1, \dots, r_\ell) \in \mathcal{P}(\lambda)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell} \varepsilon_{j_1 \dots j_1 \dots j_\ell \dots j_\ell}^{r_1 \dots r_\ell} \frac{(-1)^{r_1 j_1 + \dots + r_\ell j_\ell}}{j_1^{r_1 n} \dots j_\ell^{r_\ell n}}$$

で定義する. また, 便宜上,  $\lambda = \emptyset$  ( $\emptyset$  は 0 のただ一つの分割) のときは  $S(n; \emptyset) := 1$  と定義する.

例 4.1.  $k = 3$  のとき: 3 の分割は  $(3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  の 3 つである. また,  $\mathcal{P}((3)) = \{(3)\}$ ,  $\mathcal{P}((2, 1)) = \{(2, 1), (1, 2)\}$ ,  $\mathcal{P}((1, 1, 1)) = \{(1, 1, 1)\}$  である. よって,  $S(n; (3))$ ,  $S(n; (2, 1))$ ,  $S(n; (1, 1, 1))$  はそれぞれ次で与えられる.

$$\begin{aligned} S(n; (3)) &= \sum_i \varepsilon_{iii} \frac{(-1)^{i+i+i}}{i^n i^n i^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{3n}}, \\ S(n; (2, 1)) &= \sum_{i < j} \varepsilon_{ijj} \frac{(-1)^{i+i+j}}{i^n i^n j^n} + \sum_{i < j} \varepsilon_{ijj} \frac{(-1)^{i+j+j}}{i^n j^n j^n} = \sum_{2i < j} \frac{(-1)^j}{(2i)^{2n} j^n} + \sum_{i < 2j} \frac{(-1)^i}{i^n (2j)^{2n}}, \\ S(n; (1^3)) &= \sum_{i < j < k} \varepsilon_{ijk} \frac{(-1)^{i+j+k}}{i^n j^n k^n} = \sum_{i < j < k} \frac{(-1)^{i+j+k}}{i^n j^n k^n}. \end{aligned}$$

次の補題 (特に (ii)) が本質的である (証明には組合せ論的な議論が必要となる).

補題 4.2. (i) 任意の  $\lambda \vdash k$  に対して,  $\mu_{>1}$  が even かつ  $\lambda/\mu_{>1}$  が vertical strip であるような分割  $\mu \vdash k$  が一意的に定まる.

(ii)  $\mu \vdash k$  かつ  $\mu_{>1}$  が even のとき<sup>7</sup>,

$$(4.2) \quad S(n; (1^{m_1(\mu)})) S(n; \mu_{>1}) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda/\mu_{>1} : \text{vertical strip}}} S(n; \lambda).$$

□

例 4.3.  $k = 5$  のとき: (i) における  $\lambda$  と  $\mu$  の対応は以下の通り.

$\lambda$	$(5)$	$(4, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 1^2)$	$(2^2, 1)$	$(2, 1^3)$	$(1^5)$
$\mu$	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(2^2, 1)$	$(2, 1^3)$	$(2^2, 1)$	$(2, 1^3)$	$(1^5)$

これより (ii) の分解公式は次のようになる.

$$\begin{aligned} S(n; (1)) S(n; (4)) &= S(n; (5)) + S(n; (4, 1)), \\ S(n; (1)) S(n; (2^2)) &= S(n; (3, 2)) + S(n; (2^2, 1)), \\ S(n; (1^3)) S(n; (2)) &= S(n; (3, 1^2)) + S(n; (2, 1^3)), \\ S(n; (1^5)) S(n; \emptyset) &= S(n; (1^5)). \end{aligned}$$

よって, 最初に示した等式 (細分化) と合わせれば,

$$\begin{aligned} S_k(\{n\}^k) &= \sum_{\lambda \vdash k} S(n; \lambda) = \sum_{\substack{\mu \vdash k \\ \mu_{>1} : \text{even}}} \sum_{\lambda/\mu_{>1} : \text{vertical strip}} S(n; \lambda) \\ &= \sum_{\substack{\mu \vdash k \\ \mu_{>1} : \text{even}}} S(n; (1^{m_1(\mu)})) S(n; \mu_{>1}) \end{aligned}$$

<sup>7</sup>  $\mu$  が一般の場合, (4.2) の右辺の各  $S(n; \lambda)$  には一般に重複度が現れる.

となり, 結果として  $S_k(\{n\}^k)$  の母関数が次のように二つの母関数の積に分かれることが示される.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\{n\}^k) x^{nk} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{\mu \vdash k \\ \mu > 1: \text{even}}} S(n; (1^{m_1(\mu)})) S(n; \mu_{>1}) \right) x^{nk} \\ &= \left( \sum_{r=0}^{\infty} S(n; (1^r)) x^{nr} \right) \left( \sum_{d=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\lambda \vdash d} S(n; 2\lambda) \right\} x^{2nd} \right) \\ &= \left( \sum_{r=0}^{\infty} \zeta_r^{\bullet, \text{alt}}(\{n\}^r) x^{nr} \right) \left( \sum_{d=0}^{\infty} \zeta_d^*(\{2n\}^d) \left( \frac{x}{2} \right)^{2nd} \right). \end{aligned}$$

ここで, 等式  $\sum_{\lambda \vdash d} S(n; 2\lambda) = \frac{1}{2^{2nd}} \zeta_d^*(\{2n\}^d)$  は,  $S_k(\{n\}^k)$  を細分化した際の逆の操作をたどることで示される. 最後に出てきた二つの母関数は, 対称関数の特殊化を用いて計算ができる.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \zeta_r^{\bullet, \text{alt}}(\{n\}^r) x^{nr} &= \sum_{r=0}^{\infty} e_r \left( \frac{(-1)^1}{1^n}, \frac{(-1)^2}{2^n}, \dots \right) x^{nr} \\ &= \prod_{l=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^l}{l^n} x^n \right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\prod_{k=1}^2 \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\frac{k}{2} - \frac{x}{2} \omega_{2n}^{2j+k-1})}, \\ \sum_{d=0}^{\infty} \zeta_d^*(\{2n\}^d) \left( \frac{x}{2} \right)^{2nd} &= \sum_{d=0}^{\infty} h_d \left( \frac{1}{1^{2n}}, \frac{1}{2^{2n}}, \dots \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2nd} \\ &= \prod_{l=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^{2n}}{(2l)^{2n}} \right)^{-1} = \prod_{j=0}^{2n-1} \Gamma \left( 1 - \frac{x}{2} \omega_{2n}^j \right). \end{aligned}$$

よって (3.1) が得ることができる.

**注意 4.4.** 今回我々は, 組合せ論的な議論 (補題 4.2) を用いて  $S_k(\{n\}^k)$  の母関数が二つの母関数の積に分解することを証明した. しかしこの事実は, 多重ゼータ値や多重  $L$ -値を “分割上の (しかるべき重み関数に関する) 状態和” として解釈することでもっと一般に示すことができる, というのを九州大学の落合啓之氏にご教授いただいた. また, (4.1) についても同様の解釈で説明が可能である. 詳しくは本報告集の落合啓之氏 of 原稿を参照されたい.

**謝辞.** 共同研究者の木本一史さんには, この原稿の粗稿を読んでいただき, 大変貴重なご意見を頂戴しました. この場を借りて感謝申し上げます.

## 参考文献

- [Ao] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, *Illinois J. Math.*, **34** (1990), no.2, 191–216.
- [AK1] T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple  $L$ -values, *J. Math. Soc. Japan*, **56** (2004), no.4, 967–991.
- [AK2] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値入門, 九州大学 COE Lecture Note Series Vol. 23, 2010.
- [BBB] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, Evaluations of  $k$ -fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary  $k$ , in: *The Wilf Festschrift*, *Electron. J. Combin.* **4** (1997), Research Paper 5, approx. 21 pp. (electronic).
- [BZB] J. M. Borwein, I. J. Zucker and J. Boersma, The evaluation of character Euler double sums, *Ramanujan J.*, **15** (2008), 377–405.

- [D] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , *Leningrad Math. J.*, **2** (1991), 829–860.
- [M] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition, Oxford Univ. Press, 1995.
- [IW1] T. Ichinose and M. Wakayama, Zeta functions for the spectrum of the non-commutative harmonic oscillators, *Commun. Math. Phys.*, **258** (2005), 697–739.
- [IW2] T. Ichinose and M. Wakayama, Special values of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator and confluent Heun equations, *Kyushu J. Math.*, **59** (2005), 39–100.
- [Ki1] K. Kimoto, Higher Apéry-like numbers arising from special values of the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator, arXiv:0901.0658.
- [Ki2] K. Kimoto, Special value formula for the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, arXiv:0903.5165.
- [Ki3] K. Kimoto, Arithmetics derived from the non-commutative harmonic oscillator, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis: Mathematics for Innovation in Industry and Science, 199–210, De Gruyter Proceedings in Mathematics, 2010.
- [KiW1] K. Kimoto and M. Wakayama, Apéry-like numbers arising from special values of spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators, *Kyushu J. Math.*, **60** (2006), 383–404.
- [KiW2] K. Kimoto and M. Wakayama, Elliptic curves arising from the spectral zeta function for non-commutative harmonic oscillators and  $\Gamma_0(4)$ -modular forms, The Conference on  $L$ -Functions, 201–218, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [KiY] K. Kimoto and Y. Yamasaki, A variation of multiple  $L$ -values arising from the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 2503–2515.
- [M] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, *J. Number Theory*, **128** (2008), 2538–2548.
- [P] A. Parmeggiani, Spectral theory of non-commutative harmonic oscillators: an introduction, Lecture Notes in Mathematics, 1992. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [PW1] A. Parmeggiani and M. Wakayama, Oscillator representations and systems of ordinary differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **98** (2001), 26–30.
- [PW2] A. Parmeggiani and M. Wakayama, Non-commutative harmonic oscillators-I, II, Corrigenda and remarks to I, *Forum. Math.*, **14** (2002), 539–604, 669–690, *ibid* **15** (2003), 955–963.
- [W] 若山正人, 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数, 京都大学数理解析研究所講究録, 1479, 26–39.
- [Y] Y. Yamasaki, Evaluations of multiple Dirichlet  $L$ -values via symmetric functions, *J. Number Theory*, **129** (2009), 2369–2386.